Université Paris Diderot (Paris 7)
L1 - Sciences Exactes

MT1 MM1
2012–2013

Examen du 20 décembre 2012

SECTION A (Cours : J. Dubois)

Durée : 3 heures. Sans document, ni calculette, téléphones mobiles éteints et rangés.

Exercice 1.
On considère les equations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$E \ : \ z^5 + 1 = 0 \qquad E' \ : \ z^4 + \bar{z} = 0$$

1. Ecrire -1 sous forme polaire.
2. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.
3. Montrer que les solutions de (E) sont solutions de (E').
4. Soit z une solution non nulle de (E'), montrer que $|z| = 1$ puis que z est solution de (E).
5. Résoudre l'équation (E') dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2.
On considère le polynôme suivant $P(x) = x^6 + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$, où a, b, c et d sont réels.
On suppose que -1 est racine de multiplicité exactement 3 et 1 est racine simple de $P(x)$.

1. Rappeler la définition d'une racine simple, puis celle d'une racine de multiplicité exactement 3.
2. Estimer le nombre de racines de l'équation $P(x) = 0$ en fonction du degré de $P(x)$.
3. Quelles propriétés de P et de ses dérivées peut-on déduire de l'énoncé ?
4. A l'aide de la question précédente, déterminer les coefficients inconnues de $P(x)$.
5. Après avoir effectué la division euclidienne de $P(x)$ par $A(x) = (x+1)^3\,(x-1)$ factoriser $P(x)$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3.
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-ensemble $F = \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - 2y + 3z = 0\,\}$ et les vecteurs $u_1 = (1, 1, 2)$, $u_2 = (2, -1, 1)$ et $u_3 = (-1, 3, 2)$.
On note $G = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ sous-espace vectoriel engendré par (u_1, u_2, u_3).

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de F puis sa dimension.
3. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ? Justifier votre réponse.
4. En déduire la dimension de G.
5. On forme la famille $\mathcal{E}$ en réunissant les vecteurs de $\mathcal{B}$ à ceux de la famille (u_1, u_2, u_3).
   $\mathcal{E}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Justifier votre réponse.
6. La famille $\mathcal{B}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$? Justifier votre réponse.
7. En déduire que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exercice 4.
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u_1 = (1, 2, -1, -3)$, $u_2 = (2, -1, -1, 2)$ et $u_3 = (-3, 2, 2, -1)$.
On note $F = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ le sous-espace vectoriel engendré par (u_1, u_2, u_3).

1. Justifier que $F \neq \mathbb{R}^4$ puis calculer une équation de F.
2. Rappeler la définition d'une base de F.
3. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de F.
4. Soit $v = (3, 3, -1, 1)$.
Montrer que $v \in F$ puis déterminer les coordonnées de v dans la base (u_1, u_2, u_3).

Exercice 5.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2\, e^{-\frac{1}{x^2}}$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f. Calculer sa dérivée.
2. Etudier la limite de f en 0 puis définir $f(0)$ pour obtenir un prolongement par continuité de f en 0.
3. Etudier alors la dérivabilité de f en 0.
4. Calculer $I = f(\mathbb{R}_+)$. Pourquoi I est-il nécessairement un intervalle ?
5. On note g la restriction de f à $\mathbb{R}_+$. Démontrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} et préciser le domaine de définition de g^{-1}.
6. Etudier la continuité et la dérivabilité de g^{-1} ; g^{-1} est-elle dérivable en 0 ? (justifier votre réponse)
7. Calculer $g(1)$ puis déterminer la valeur de la dérivée de g^{-1} en $\dfrac{1}{e}$?

Exercice 6.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left[\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n)\,. \end{array}\right.$$

On note $I = [0, \frac{\pi}{2}]$.

1. Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est définie et appartient à I.
2. Montrer que l'équation $x = f(x)$ admet une unique solution dans l'intervalle I.
On note α ce nombre.
3. Soit x, y des réels tels que $x < y$.
Enoncer le théorème des accroissements finis pour l'application f sur $[x, y]$.
4. Montrer que, pour tous réels x, y, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|x - y|$.
5. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\pi}{2}\,.$$
6. Que peut-on en conclure pour la suite (u_n) ?
7. Trouver un entier n tel que $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$.